ESPACES PREHILBERTIENS REELS

Proposition 1 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x,y)\in E^2$,

$$|(x|y)|\leq \|x\|\|y\|.$$

Proposition 2 (**Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz**)
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x,y)\in E^2$,

$$|(x|y)| = \|x\|\|y\| \quad\Longleftrightarrow\quad (x,y) \text{ liée.}$$

Proposition 3 (**Inégalité de Minkowski**)
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x,y)\in E^2$,

$$\|x+y\|\leq \|x\|+\|y\|.$$

Proposition 4 (**Cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski**)
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x,y)\in E^2$,

$$\|x+y\| = \|x\|+\|y\| \quad\Longleftrightarrow\quad x=0 \text{ ou } \exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\ y=\lambda x.$$

Proposition 5
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x,y)\in E^2$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)\\
\|x-y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2-2(x|y)\\
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad \text{(Identité du parallélogramme)}\\
(x|y) &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) \quad \text{(Identité de polarisation)}
\end{aligned}$$

Proposition 6 (**Relation de Pythagore**)
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel.

(i) Soit $(x,y)\in E^2$.

$$x\perp y \quad\Longleftrightarrow\quad \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

(ii) Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in E^n$ une famille orthogonale, alors

$$\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2=\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Proposition 7
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille orthogonale de E telle que pour tout $i\in [\![1,n]\!]$, x_i est non nul. Alors $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre dans E.
En particulier, une famille orthonormale est libre.

Théorème 1 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une unique famille orthonormale $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ de E telle que

$$\forall i\in [\![1,p]\!] \qquad \mathrm{Vect}(x_1\ldots,x_i)=\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_i) \quad \text{et} \quad (x_i|v_i)>0.$$

Théorème 2 (Existence de bases orthonormales dans un euclidien)
Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Théorème 3 (de la base orthonormée incomplète)
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille orthonormale de E $(p\leq n)$. Il existe $(e_{p+1},\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ soit une base orthonormale de E.

Proposition 8 (Calculs dans une base orthonormée)
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E.

(i) $\forall x\in E$, $x=\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$.

(ii) $\forall (x,y)\in E^2$, si $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ie_i$ alors $(x|y)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ et $\|x\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$.

(ii) Pour $(x,y)\in E^2$, on note X et Y les matrices représentative de x et y respectivement dans $\mathcal{B}$.

Alors $(x|y)=X^TY$ et $\|x\|=\sqrt{X^TX}$.

Proposition 9 Matrice représentative d'un endomorphisme dans une base orthonormée
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On note A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ et $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. On a

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j}=(e_i|f(e_j)).$$

Proposition 10
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel.

(i) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et

$$F\cap F^\perp=\{0\}.$$

(ii) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires orthogonaux, alors $G=F^\perp$.

Proposition 11 (**Distance à un sous espace vectoriel possédant un supplémentaire orthogonal**)
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel.
Soit F un sous-espace vectoriel de E possédant un supplémentaire orthogonal. On note p le projecteur orthogonal sur F (projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$).
Soit x dans E. La distance de x à F est atteinte pour un unique élément de F : $p(x)$. Ou encore : si on note $d = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|x - y\|$, alors $d = \|x - p(x)\|$ et si $z \in E$ vérifie $d = \|x - z\|$, alors $z = p(x)$.

Proposition 12
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, n.
(i) $E = F \oplus F^\perp$.
(ii) On note p le projecteur orthogonal sur F. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$,
$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i.$$

Proposition 13 (**Distance à un sous espace vectoriel de dimension finie**)
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On note p le projecteur (orthogonal) sur F.
Soit x dans E. $y \mapsto \|x - y\|$ admet un minimum global sur F atteint (uniquement) en $p(x)$.

Proposition 14
Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien. Soit $u \in E$, $u \neq 0$. On note $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
Pour $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur H est $x - \frac{(x|u)}{(u|u)} u$.
La distance de x à H est $\frac{|(x|u)|}{\|u\|}$.

Proposition 15
Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien. Soit F un sous espace vectoriel de E.
(i) $E = F \oplus F^\perp$.
(ii) $\dim\left(F^\perp\right) = \dim E - \dim F$.
(iii) $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.